251 - Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

I) <u>Indépendance d'évènements</u> [Les] + [Ouv]

1) <u>Définitions</u> [Les] + [Ouv]

Déf : evts indépendants [Ouv] *(P(A inter B)=P(A)P(B))*

Exemple : les jets consécutifs d'une pièce de monnaie forment des événements indépendants.

Paradoxe de Galton : on lance trois pièces équilibrées en même temps. Parmi ces trois pièces, deux indiquent un résultat identique. Il y a alors une chance sur deux pour que la 3^e pièce indique le même résultat. Donc la proba que les 3 pièces indiquent la même face est ½. Pourtant, P(PPP)+P(FFF)=1/8+1/8=1/4 *(c'est parce que quand on a trouvé ½, on a fait P(les pièces indiquent la même face)=P(il existe deux pièces indiquant la même face)*P(la 3^e pièce indique la même face)=1*1/2, mais ces deux évènements ne sont pas indépendants)*

Déf : famille d'evts indpts *(deux familles F1 et F2 sont indpt si tout élément de F1 est indpdt de tout élément de F2)*

Déf : on dit que les évènements d'une famille sont indépendants si la proba de toute intersection finie est égale au produit des probas [Ouv]

Déf : évènements indépendants deux à deux [Les 8]

Prop : indépendants dans leur ensemble => indépendants deux à deux [Les 8]

C-ex : (Bernstein) [Les 8]

2) <u>Indépendance et cardinalité</u> **[???]**

Prop : s'il existe n évènements indépendants, de proba différente de 0 ou 1, alors #Omega > 2^n *(soient A1,…,An les evts. Je regarde l'évènement A_{e1,…,en) qui vaut l'intersection des Ai^{ei}, où e_i vaut 0 ou 1, et Ai^0=complémentaire de Ai, Ai^1=Ai. La proba de A_{e1,…,en) est non nulle car les évènements sont indépendants et de proba non nulle. Ils sont en plus disjoints par construction. Et il y en a 2^n. Donc Omega doit contenir au moins 2^n points)*

Prop : d'il existe n évènements indépendants 2 à 2, #Omega > n+1 *(exo de combinatoire, tiroirs de Dirichlet)*

II) <u>Indépendance de va</u> [Ouv] + [Ross]

1) <u>Définitions et propriétés</u> [Ouv] + [Ross]

Déf : va indépendantes si les tribus engendrées sont indépendantes [Ouv]

Déf : va iid

Déf : va non corrélées, covariance

Prop : X1 et X2 indépendantes ssi pour toutes fonctions mesurables bornées… [Ouv]

Critères d'indépendances avec fct de rep, densités… [Ouv]

Exemple : aiguille de Buffon [Ross 286]

2) <u>Existence de suites de va iid</u> [Ouv]

Th : Mu une loi de probas donnée. F sa fonction de répartition et G sa fonction quantile. X une v.a. suivant une loi unif sur [0,1]. Alors la loi de G(X) est mu [Ouv 29] *(remarquer que F(x)>t ssi x > G(t), en déduire que F est la fonction de rep de G(Y))*

Prop : Soit x dans [0,1[. Posons R_0(x)=x, Dn(x)=[2R_{n-1}(x)] et Rn(x)=2R_{n-1}(x)-Dn(x). Alors pour tout x dans [0,1[, x=sum(D_j(x)/2^j). De plus, les D_j sont des variables iid de loi Ber(1/2) [Ouv 54]

Prop : on peut construire une suite de va iid de loi uniforme dur [0,1] [Ouv p.58]

Cor : on peut donc construire une suite (V_n) de va uniformes sur [0,1] indépendantes, et une suite (G_n(V_n)) de v.a. de loi mu_n indépendantes [Ouv p.58]

3) Fonction caractéristique et indépendance [BL]

Déf : généralisation de la FC aux vecteurs.

Th : une famille (X1,…Xn) de va réelles sont indépendantes ssi la FC de (X1,…,Xn) en (t1,…,tn) est le produit des FC [BL 80]

Attention : si X et Y sont indépendantes alors E(XY)=E(X)E(Y) mais réciproque fausse. Par contre, E(XY)=E(X)E(Y) ssi Xet Y non corrélées.

Appl : X=(X1,…,Xd) un vecteur gaussien. Alors ses coordonnées sont indépendantes ssi elles sont non corrélées [BL 101] *(par la fonction caractéristique)*

III) Loi d'une somme de v.a indépendantes [BL]

1) Produit de convolution [BL]

Prop : la loi de X+Y est définie par le pdt de convolution [BL 85]

Csq : cas particulier où les va sont à densité

Ex : somme de deux lois de Poisson, deux lois normales [BL 87-89]

2) FC d'une somme de va indépendantes [BL]

Th : si X et Y sont indpt alors FC(X+Y)=FC(X)FC(Y) [BL 86] *(facile : on utilise que deux va sont indépendantes ssi E(f(X)g(Y))=E(f(X))E(g(Y)) pour f,g boréliennes)*

Ex : somme de deux lois normales via fonctions caractéristiques [BL 89]

C-ex : attention, réciproque fausse *(loi de Cauchy : FC(X+X)=FC(2X)=FC(X)² mais X et X sont pas indépendantes)*

Ex : somme de lois gamma [BL 103]

Appl : une loi gamma est somme d'exponentielles indépendantes [BL 103]

3) Caractérisation de loi par l'indépendance [BL]

Th : soient deux va de carré intégrable, indépendantes. Alors X+Y et X-Y sont indépendantes ssi X et Y sont des lois normales

Th : le th précédent reste vrai si on ne suppose pas X et Y de carré intégrable

IV) Comportement limite de suites de va ou d'evt indépendants [Ouv]

1) Indépendance et évènements asymptotiques [Ouv]

Déf : tribu asymptotique

Loi du tout ou rien

Borel Cantelli

2) Théorèmes limites [Ouv]

LFGN

TCL

Développements :
1 - Construction d'une suite de v.a. i.i.d. de lois données [Ouv 58] (***)
2 - Somme de lois normales [Carr] (**)

Bibliographie :
[Ouv]
[Les]
[BL]
[Ross]